INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Carlos Sampaio Cherto

Dois Teoremas Clássicos em Análise Matemática

São Paulo

2º Semestre de 2021

Carlos Sampaio Cherto

Dois Teoremas Clássicos em Análise Matemática

Monografia apresentada à disciplina
MAT–0148 — Introdução ao Trabalho Científico,
Departamento de Matemática,
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo.

Área de Concentração: ANÁLISE MATEMÁTICA

Orientadora: Daniela Mariz Silva Vieira – USP

São Paulo

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2021

Ficha catalográfica elaborada com dados inseridos pelo(a) autor(a)
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

```
Cherto, Carlos Sampaio
   Dois Teoremas Clássicos em Análise Matemática /
Carlos Sampaio Cherto; orientadora, Daniela Mariz Silva
Vieira.  - São Paulo, 2021.
   47 p.:  il.


   Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Matemática / Instituto de Matemática e Estatística /
Universidade de São Paulo.
   Bibliografia


   1.  Análise Matemática.  I. Mariz Silva Vieira,
Daniela.  II. Título.
```

Bibliotecárias do Serviço de Informação e Biblioteca
Carlos Benjamin de Lyra do IME-USP, responsáveis pela
estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Maria Lúcia Ribeiro CRB-8/2766; Stela do Nascimento Madruga CRB 8/7534.

Folha de Avaliação

Aluno: Carlos Sampaio Cherto

Título: Dois Teoremas Clássicos em Análise Matemática

Data: 2º Semestre de 2021

Banca Examinadora

Daniela Mariz Silva Vieira – USP (Orientadora)

Christina Brech – USP

Severino Toscano do Rego Melo – USP

Para meus pais

E, claro, para Thamires

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer meu pai, minha mãe e minha irmã, por todo o apoio que me ofereceram, especialmente durante esses últimos anos conturbados.

Agradeço Bianca Carvalho e Gabriel Bittencourt por toda a ajuda que me deram.

Agradeço também minha orientadora, Daniela Mariz, por sua imensa dedicação e generosidade.

Agradeço a professora Christina Brech e o professor Severino Toscano pelas suas aulas excelentes e por terem aceitado fazer parte da comissão julgadora.

Agradeço as professoras Mary Lilian e Lucia Ikemoto, e os professores Pierluigi Benevieri, Adilson Simonis, Rogerio Fajardo e Luiz Carlos Chamon por sua didática e pelo esforço que colocam em suas aulas.

Agradeço também o CNPq, pelo apoio que me foi concedido através da bolsa PIBIC.

Por fim, agradeço Thamires Kaneko, por me motivar e inspirar diariamente.

My advice to students reading this book is very simple:
Don’t believe anything you read in this book
- Daniel J. Velleman

Resumo

CHERTO, C. **Dois Teoremas Clássicos em Análise Matemática**. 2021. 35 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2021.

Estudamos o Teorema de Ascoli-Arzelà e o Teorema de Stone-Weierstrass em três ambientes: na reta, em espaços métricos e em espaços topológicos. Investigamos as dificuldades que surgem ao tentar generalizar um resultado.

Palavras-chave: Análise, Espaços Métricos, Topologia, Teorema de Ascoli-Arzelà, Teorema de Stone-Weierstrass.

ABSTRACT

CHERTO, C. **Two Classic Theorems of Mathematical Analisis**. 2021. 35 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2021.

We study the Ascoli-Arzelà Theorem and the Stone-Weierstrass Theorem in three diferent settings: the real numbers, metric spaces and topological spaces. We investigate the difficulties that appear when trying to generalize a result.

Keywords: Analysis, Metric Spaces, Topology, Ascoli-Arzelà Theorem, Stone-Weierstrass Theorem.

Sumário

Capítulo 1

Compacidade e Motivação

Apesar de ser extremamente importante, a ideia de compacidade pode parecer bastante confusa em um primeiro momento. Faremos aqui uma discussão baseada no artigo [5] que visa proporcionar um entendimento intuitivo desse conceito e motivar os teoremas que estudaremos neste trabalho.

Alguns dos objetos mais básicos que existem na mátemática são conjuntos finitos. Devido a essa extrema simplicidade, quando os munimos de algum tipo de estrutura, eles costumam gozar de propriedades especialmente boas, que não valem em geral. Por sorte, em muitos casos conseguimos encontrar conjuntos "quase finitos". Isto é, conjuntos que apesar de serem infinitos, se comportam, em relação à estrutura, de forma similar aos conjuntos finitos. Esta ideia de conjuntos "quase finitos" aparece em várias áreas da matemática, mas na topologia eles recebem o nome de *espaços compactos*.

O Teorema de Weierstrass no dá um exemplo de uma tal propriedade. Funções reais de domínio finito sempre assumem um valor máximo. Isso não é válido em geral, mas se o domínio for compacto e a função real for contínua, o resultado é verdadeiro. Um outro exemplo é uma das caracterizações de espaços métricos compactos. Toda sequência em um conjunto finito admite uma subsequência constante. Analogamente, toda sequência em um espaço métrico compacto admite uma subsequência convergente. Assim, vemos que algumas das propriedades de conjuntos finitos podem ser parcialmente recuperadas em espaços compactos.

Agora, consideramos duas propriedades de subconjuntos finitos da reta. Suponha que temos uma função real de domínio finito. É fácil notar que podemos obter um "polinômio" que coincide com a função dada. Por outro lado, suponha que E é um conjunto de funções reais definidas em um conjunto finito D. Suponha também que, para cada $x \in D$, $\{f(x) : f \in E\}$ é conjunto finito. Então E é um conjunto finito. De fato, existe uma quantidade finita de funções possíveis dentro dessas restrições.

A pergunta natural a se fazer é se conseguimos encontrar versões análogas desses resultados que valem para domínios compactos. Os teoremas estudados neste trabalho testemunham justamente que, com algumas adaptações, isso é sim possível.

Por fim, notamos que esse entendimento intuitivo de compacidade pode ser extremamente útil, não apenas para identificar possíveis teoremas, como também para nos ajudar a prová-los. De fato, a demonstração do Teorema 3.1.1 pode ser motivada raciocinando em termos do caso finito.

Capítulo 2

Preliminares

Neste trabalho, nosso objetivo foi estudar os teoremas de Ascoli-Arzelà e de Stone-Weierstrass em três contextos: na reta, em espaços métricos e em espaços topológicos. Dessa forma, além de nos familiarizar com as técnicas e ferramentas apropriadas para cada ambiente, também ganhamos um senso sobre como a matemática evolui e como resultados podem ser generalizados.

Ambos os teoremas são afirmações sobre o espaço das funções contínuas definidas em um compacto. O teorema de Ascoli-Arzelà nos dá uma condição necessária e suficiente para que um conjunto de tais funções tenha fecho compacto. Por outro lado, o teorema de Stone-Weierstrass nos diz quando uma subálgebra desse espaço é densa. Tendo em vista a imensa importância de funções contínuas e a grande utilidade de conjuntos densos e compactos, é fácil perceber o valor dos dois teoremas.

Aqui destacaremos algumas definições e proposições básicas sobre espaços métricos e topológicos que serão utilizadas no decorrer do texto. Por serem resultados simples e bem conhecidos, as proposições não serão demonstradas.

Utilizaremos as notações $B(a,r)$ e $B[a,r]$ para denotar as bolas de centro a e raio r aberta e fechada respectivamente. Além disso, se A é subconjunto de um espaço topológico, denotamos seu fecho por $\overline{A}$.

Seja M um espaço métrico. M é dito *totalmente limitado* quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma quantidade finita de subconjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cada um com diâmetro menor do que ε, tais que $M = X_1 \cup \cdots \cup X_n$.

Proposição 2.0.1. *Sejam M e N espaços métricos. Se M é compacto e $f : M \longrightarrow N$ é contínua, então f é uniformemente contínua.*

Proposição 2.0.2. *Sejam M e K espaços métricos, com K compacto. Seja $f : M \times K \longrightarrow N$ uma função contínua. Dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta$ em M implica $d(f(x,t), f(a,t)) < \varepsilon$, qualquer que seja $t \in K$.*

Proposição 2.0.3 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se K é um espaço topológico compacto e $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f atinge máximo e mínimo em K.*

Sejam M, N espaços métricos. Utilizaremos $\mathscr{C}(M;N)$ para denotar o conjunto de todas as funções contínuas $f : M \longrightarrow N$. Se M é compacto, para quaisquer $f, g \in \mathscr{C}(M;N)$ a função $d(f(x), g(x))$ é contínua, e portanto assume máximo em M. Daí, podemos munir $\mathscr{C}(M;N)$ da métrica

$$d(f,g) = \sup_{x\in M} d(f(x), g(x)).$$

Chamamos essa métrica de *métrica da convergência uniforme*. Ao falar do espaço $\mathscr{C}(M;N)$, a não ser que seja dito o contrário, sempre utilizaremos esta métrica.

Similarmente, se M é espaço métrico compacto, podemos definir em $\mathscr{C}(M;\mathbb{R})$ a norma

$$\|f\| = \sup_{x\in M} |f(x)|.$$

Ela será a norma usualmente escolhida em $\mathscr{C}(M;\mathbb{R})$.

Proposição 2.0.4 (Teorema de Dini)**.** *Seja M um espaço métrico compacto e (f_n) uma sequência de funções reais e contínuas de M em $\mathbb{R}$. Se (f_n) converge simplesmente para uma função contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e tem-se que $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ para todo $x \in M$, então a convergência $f_n \to f$ é uniforme em M.*

Proposição 2.0.5 (Caracterizações de Espaços Métricos Compactos)**.** *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1. *M é compacto;*
2. *Toda sequência de M possui uma subsequência convergente;*
3. *M é completo e totalmente limitado.*

Corolário 2.0.6. *Todo espaço métrico compacto M contém um subconjunto enumerável denso.*

Dada uma quantidade infinita enumerável de espaços métricos $(M_1, d_1), (M_2, d_2), \cdots$, considere $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$. Se $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ são dois elementos desse conjunto, podemos definir em M a métrica

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}.$$

Essa métrica é conhecida como *métrica produto*. Uma das razões dela ser extremamente útil é a seguinte proposição:

Proposição 2.0.7. *Uma sequência $(x_n) = (x_n^1, x_n^2, \cdots)$ em $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ converge para $a = (a^1, a^2, \cdots)$ se, e somente se, para cada $i \in \mathbb{N}$ a sequência (x_n^i) em M_i converge para a^i.*

Intuitivamente, a proposição acima diz que para uma sequência em $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ convergir a a, é necessário e suficiente que cada "coordenada" da sequência convirja à coordenada correspondente de a. Se temos várias noções de convergência, cada uma correspondendo a uma propriedade, conseguimos então definir uma convergência em um espaço maior que corresponde a todas essas propriedades serem simultaneamente satisfeitas. Veremos um exemplo concreto na seção 4.2.

A seguir, mostramos outra propriedade importante da métrica produto:

Proposição 2.0.8 (Teorema de Cantor-Tychonov)**.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja M_n um espaço métrico. Então, o espaço métrico $M = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$ com a métrica produto é compacto se, e somente se, cada fator M_n é compacto.*

Proposição 2.0.9. *Um espaço vetorial normado tem dimensão finita se, e somente se, sua bola fechada unitária é compacta.*

Proposição 2.0.10. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1. *M é localmente compacto e separável;*

2. *Existem $K_1, K_2, \cdots$ compactos em M, com $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.*

A maioria das proposições dessa seção podem ser encontrados em [3].

Capítulo 3

Na Reta

Começamos estudando o caso mais simples, o da reta. Neste ambiente, temos a seguinte caracterização extremamente útil de conjuntos compactos: Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado. Além disso, os reais são um conjunto completo. Essas e outras características do conjunto dos reais facilitam as demonstrações e revelam equivalências e consequências novas dos teoremas.

3.1 O Teorema de Ascoli-Arzelà na Reta

Em Análise, é frequentemente útil saber se uma dada sequência de funções contínuas, definidas em algum intervalo $[a, b]$, tem uma subsequência que converge uniformemente para alguma função. Esta versão do teorema de Ascoli-Arzelà nos levará a uma condição suficiente para garantir que isso acontece. Mas primeiro precisamos definir o conceito de equicontinuidade.

Sejam M, N espaços métricos e $\mathscr{F}$ um conjunto de funções $f : M \longrightarrow N$. $\mathscr{F}$ é dito *equicontínuo no ponto* $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implique $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, seja qual for $f \in \mathscr{F}$. Se $\mathscr{F}$ é equicontínuo em todos os pontos de M, $\mathscr{F}$ é dito *equicontínuo*.

Então, a equicontinuidade em a se assemelha muito ao conceito de continuidade em a, com a diferença de que o mesmo δ precisa "funcionar" para todas as funções de $\mathscr{F}$.

Também, para M, N espaços métricos e $\mathscr{F}$ um conjunto de funções $f : M \longrightarrow N$, dizemos que $\mathscr{F}$ é *uniformemente equicontínuo* se, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implique $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, seja qual for $f \in \mathscr{F}$ e sejam quais forem $x, y \in M$.

Não é difícil mostrar que, se o domínio das funções for compacto, todo conjunto equicontínuo é uniformemente equicontínuo. Por esta razão, no teorema seguinte estes dois conceitos serão tratados como equivalentes.

Por fim, uma sequência de funções $f_n : M \longrightarrow N$ se diz equicontínua quando o conjunto $\{f_1, f_2, \dots\}$ é equicontínuo.

Devido às simplificações que decorrem de estarmos trabalhando com o caso real, o teorema, como apresentaremos a seguir, pode parecer bem diferente das versões que veremos mais tarde. Quando estas formas alternativas do teorema forem visitadas, explicaremos por que ambas as formulações são equivalentes.

A demonstração que será apresentada aqui pode ser encontrada no capítulo 10 do livro [2].

Teorema 3.1.1 (Teorema de Ascoli-Arzelà na Reta). *Seja $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ espaço métrico com a métrica da convergência uniforme e $\mathscr{F}$ subconjunto limitado e equicontínuo de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Então $\mathscr{F}$ é totalmente limitado.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Nosso objetivo é encontrar uma quantidade finita de conjuntos de diâmetro menor do que ε que cubram $\mathscr{F}$. Para isso, dada $f \in \mathscr{F}$, encontraremos uma g a distância menor do que $\varepsilon/3$ de f, de modo que $f \in B(g;\varepsilon/3)$. Por fim, observaremos que existe uma quantidade finita de funções g que podem ser obtidas através da técnica utilizada, o que conclui a prova.

Como $\mathscr{F}$ é limitado, existe algum $M > 0$ tal que, qualquer que seja $f \in \mathscr{F}$,

$$\|f\| < M.$$

Como $\mathscr{F}$ é equicontínuo e as funções estão definidas em um conjunto compacto, ele é uniformemente equicontínuo. Logo existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{15}.$$

Particionaremos, agora, o intervalo $[a,b]$, tomando $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, de modo que $x_{j+1} - x_j < \delta$, para $j = 0,1,\ldots,n-1$. Da mesma forma, particionamos o intervalo $[-M,M]$, tomando $-M = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = M$, de modo que $y_{k+1} - y_k < \varepsilon/15$, para $k = 0,1,\ldots,m-1$.

Assim, o retângulo $[a,b] \times [-M,M]$, que contém o gráfico de todas as funções de $\mathscr{F}$, fica subdividido em subretângulos, cada um com base menor do que δ e altura menor do que $\varepsilon/15$.

Agora, tome $f \in \mathscr{F}$. Para $j = 1,2,\ldots,n$, sempre existe $i(j) \in \{1,2,\ldots,m-1\}$ tal que $y_{i(j)} \leq f(x_j) \leq y_{i(j)+1}$. Agora definimos uma função g pondo, para cada j, $g(x_j) = y_{i(j)}$ e fazendo g ser um segmento de reta que conecta os pontos $(x_j; g(x_j))$ e $(x_{j+1}; g(x_{j+1}))$ nos intervalos abertos (x_j, x_{j+1}). Obtemos assim uma função contínua g de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ que satisfaz, para todo j,

$$|f(x_j) - g(x_j)| < \frac{\varepsilon}{15}.$$

Assim, temos que

$$|g(x_{j+1}) - g(x_j)| \leq |g(x_{j+1}) - f(x_{j+1})| + |f(x_{j+1}) - f(x_j)| + |f(x_j) - g(x_j)|.$$

Utilizando a equicontinuidade de $\mathscr{F}$ e o fato de que o valor de $g(x_j)$ foi escolhido justamente para distar menos do que $\varepsilon/15$ de $f(x_j)$, obtemos que

$$|g(x_{j+1}) - g(x_j)| < \frac{\varepsilon}{15} + \frac{\varepsilon}{15} + \frac{\varepsilon}{15} = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Dado $x \in [a,b]$ qualquer, existe $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $x_j \leq x \leq x_{j+1}$. Como g é monótona em cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$,

$$|g(x) - g(x_j)| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Então,

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{15} + \frac{\varepsilon}{15} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como o intervalo $[a,b]$ é compacto, pela Proposição 2.0.3,

$$\|f - g\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Isto nos diz que $f \in B(g, \varepsilon/3)$, cujo diâmetro é $2\varepsilon/3 < \varepsilon$. Construindo uma g para cada f, temos que $\mathscr{F}$ estará contido na união das bolas centradas nas funções g e de raio $\varepsilon/3$. Mas, cada g é determinada unicamente escolhendo, para cada um dos $n+1$ pontos x_j, um valor y_k, sendo que existem $m+1$ possibilidades. Existem, portanto, apenas $(m+1)^{n+1}$ possíveis funções g, de modo que $\mathscr{F}$ pode ser coberto utilizando um número finito de conjuntos de diâmetro menor que ε. □

Agora, utilizamos o Teorema 3.1.1 para provar o resultado desejado.

Corolário 3.1.2. *Seja (f_n) uma sequência equicontínua e limitada em $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$. Então (f_n) possui uma subsequência que converge uniformemente para alguma função de $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.1.1, $\mathscr{F}$ é totalmente limitado. Daí, o seu fecho $\overline{\mathscr{F}}$ é totalmente limitado. Como $\overline{\mathscr{F}}$ é fechado e está contido em $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$, que é completo, $\overline{\mathscr{F}}$ é completo. Como é completo e totalmente limitado, pela Proposição 2.0.5, toda sequência de $\overline{\mathscr{F}}$ tem uma subsequência que converge. Em particular, (f_n) tem uma subsequência que converge uniformemente em $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$. □

3.2 O Teorema de Aproximação de Weierstrass

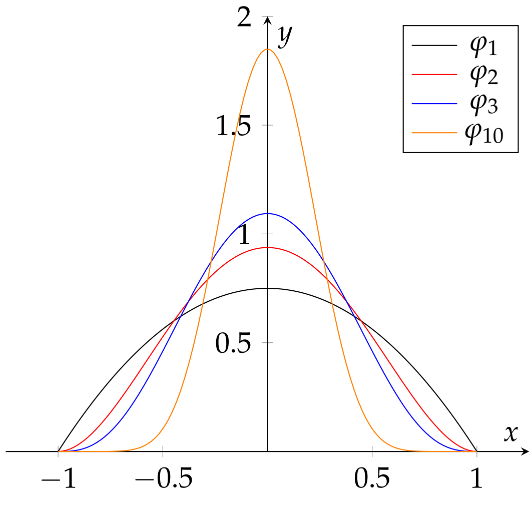
Agora veremos um caso particular do Teorema de Stone-Weierstrass na reta, que historicamente veio antes dele. Aqui fica evidente uma outra facilidade de se trabalhar com os reais: podemos utilizar a integração como uma ferramenta. Em contextos mais gerais, precisaremos utilizar abordagens completamente diferentes.

O Teorema de Aproximação de Weierstrass diz que qualquer função contínua definida em um intervalo $[a,b]$ pode ser aproximada, tão bem quanto se queira, por um polinômio. Esse teorema pode ser generalizado, de forma a obter o Teorema de Stone-Weierstrass, que diz respeito a espaços métricos compactos em geral. Apresentaremos uma demonstração, devida a E. Landau, que utiliza o conceito de convolução para construir os polinômios que aproximam a função. Esta demonstração pode ser encontrada no capítulo 8 do livro [3].

Uma forma intuitiva de enxergar a convolução $f * \varphi$ é como uma técnica para regularizar a função f, construindo uma nova função cujo valor, no ponto x, é uma média ponderada feita em volta do ponto x de f, onde φ é a função dos pesos. Imaginemos, agora, que φ é uma função contínua, positiva e que se anula fora do intervalo $[-\delta, \delta]$. Além disso, impomos que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = 1$. Então, $(f * \varphi)(x)$ é a média ponderada dos valores de f no intervalo $[x-\delta, x+\delta]$. Devido às condições que impusemos em φ e à continuidade de f, à medida que escolhemos valores menores de δ, mais e mais $(f * \varphi)(x)$ se aproxima do valor de $f(x)$. Dessa forma, vemos que é possível obter aproximações arbitrariamente boas da função f através da convolução, tomando valores de δ cada vez menores. Isto ainda não é suficiente, no entanto, pois precisamos garantir que as funções que aproximem f sejam polinômios. Para isso, será preciso abrir mão da condição imposta de que φ se anula fora do intervalo $[-\delta, \delta]$, mas fazendo com que esse fato seja aproximadamente verdadeiro, conseguiremos obter convoluções que aproximem f e resultem em polinômios, como veremos a seguir.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $c_n = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n\, dt$. Definimos, então, $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} (1/c_n)(1-t^2)^n & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{se } t \notin [-1,1] \end{cases}.$$



Provaremos agora três lemas sobre a função φ. O primeiro nos garante que, para n suficientemente grande, $\varphi_n(x)$ será aproximadamente zero nas redondezas do ponto $x = 0$. É isso que vai garantir que a convolução de f com φ aproxime f.

Lema 3.2.1. *Se* $0 < \delta < 1$, *então* $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0$ *uniformemente para* $|t| \geq \delta$.

Demonstração: Derivando $\varphi_n(t)$ obtemos:

$$\varphi_n'(t) = \frac{-2n}{c_n} \cdot (1-t^2)^{n-1} \cdot t.$$

Como $(-2n/c_n) \leq 0$ e $(1-t^2)^{n-1} \geq 0$, se $-1 < t < 0$, a derivada é positiva. Se $1 > t > 0$, ela é negativa. Assim a função é crescente em [-1,0] e decrescente em [0,1]. Portanto, ao provar que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(-\delta) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\delta) = 0$, fica provado o lema. Como a função é par, provar um desses limites é suficiente.

$$c_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt = 2\int_0^1 (1-t)^n(1+t)^n\,dt \geq 2\int_0^1 (1-t)^n\,dt = \frac{2}{n+1}.$$

Daí,

$$\varphi_n(\delta) = (1/c_n)(1-\delta^2)^n \leq \frac{n+1}{2}\cdot(1-\delta^2)^n.$$

Como $0 < 1-\delta^2 < 1$, segue que $\lim_{n\to\infty}(1-\delta^2)^n\cdot(n+1)/2 = 0$.

□

O próximo lema nos garante que, dada uma função f, podemos estendê-la para $\mathbb{R}$ de modo que sua convolução será restrição de um polinômio. Quando formos provar o teorema, veremos que é suficiente que este lema e o próximo sejam demonstrados para o caso em que $[a,b] = [0,1]$ e que $f(0) = f(1) = 0$.

Lema 3.2.2. *Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(0) = f(1) = 0$. Considere f definida em todo $\mathbb{R}$, pondo $f(x) = 0$ se $x \notin [0,1]$. Para $n \in \mathbb{N}$, seja $p_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ com*

$$p_n(x) = (f*\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\varphi_n(t)\,dt = \int_{-1}^{+1} f(x+t)\varphi_n(t)\,dt.$$

Então p_n é restrição de um polinômio.

Demonstração: Fazendo a mudança de variável $y = x+t$ obtemos

$$p_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(y)\varphi_n(y-x)\,dy.$$

Mas, como $x \in [0,1]$, temos que $[0,1] \subset [x-1, x+1]$, qualquer que seja x. Como f é nula fora de $[0,1]$, obtemos que

$$\int_{x-1}^{x+1} f(y)\varphi_n(y-x)\,dy = \int_0^1 f(y)\varphi_n(y-x)\,dy.$$

Como $x, y \in [0,1]$, $x-y \in [-1,1]$. Substituíndo em φ_n obtemos

$$\varphi_n(y-x) = \frac{1}{c_n}[1-(y-x)^2]^n = \sum_{i=0}^{2n} \xi_i(y)x^i,$$

onde cada ξ_i é um coeficiente que depende de y. Como a integral é na variável y, as potências de x "saem" de dentro dela. Assim, colocando $a_i = \int_0^1 f(y)\cdot\xi_i(y)\,dy$, obtemos

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} a_i \cdot x^i.$$

□

O lema seguinte garante que os polinômios obtidos de fato aproximam a função f uniformemente.

Lema 3.2.3. *Nas condições do lema anterior, tem-se* $\lim_{n\to\infty} p_n = f$ *uniformemente no intervalo* $[0,1]$.

Demonstração: Como $\int_{-1}^{+1} \varphi_n(t)\, dt = 1$, temos que

$$f(x) = \int_{-1}^{+1} f(x)\varphi_n(t)\, dt.$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [0,1]$, vale

$$p_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{+1} [f(x+t) - f(x)]\varphi_n(t)\, dt.$$

Então,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \int_{-1}^{+1} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt.$$

Para simplificar a notação, definimos $I(x) = \int_{-1}^{+1} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt$.

Seja $\varepsilon > 0$. Para demonstrar o lema, é suficiente encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow I(x) < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$. Para fazer isso, fixando um dado x, separaremos $I(x)$ em três pedaços. Os pedaços das extremidades serão pequenos pois $\varphi_n(t)$ se aproxima de zero longe do centro. O pedaço do meio é pequeno pois a continuidade uniforme de f garante que $|f(x+t) - f(x)|$ é pequeno para valores de t próximos de zero. Passemos a considerações mais rigorosas.

Pela Proposição 2.0.1, f é uniformemente contínua. Daí, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|t| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon/3$, qualquer que seja $x \in [0,1]$. Como $|f|$ é contínua, pela Proposição 2.0.3 ela assume máximo. Tomamos $M = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Pelo Lema 3.2.1, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, $|t| \geq \delta \Rightarrow |\varphi_n(t)| < \varepsilon/(6M)$. Logo, para todo $n > n_0$ e todo $x \in [0,1]$ temos $I(x) \leq A + B + C$, onde

$$A = \int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3},$$

$$B = \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\, dt \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$C = \int_{\delta}^{1} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, para $n > n_0$ e $x \in [0,1]$, $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$. □

Finalmente, provaremos o teorema.

Teorema 3.2.4 (Teorema de Aproximação de Weierstrass)**.** *Dada uma função contínua* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *existe uma sequência de polinômios* p_n *tais que* $\lim_{n\to\infty} p_n = f$ *uniformemente em* $[a,b]$.

Demonstração: Utilizando os Lemas 3.2.2 e 3.2.3, o teorema está provado para o caso em que $[a,b] = [0,1]$ e $f(0) = f(1) = 0$. Mostraremos, agora, que o caso geral se reduz a este.

Em primeiro lugar, dada uma função contínua $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos facilmente construir uma nova função f que satisfaça $f(0) = f(1) = 0$. Para tanto, basta tomar $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = g(t) - g(0) - t[g(1) - g(0)]$. Tal f é limite uniforme de uma sequência de polinômios p_n. Assim, g é limite uniforme da sequência de polinômios $p_n(t) + t[g(1) - g(0)] + g(0)$. Isto é, qualquer função contínua definida em $[0,1]$ é limite uniforme de polinômios.

Agora, tome uma função contínua $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Definindo $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(s) = h((1-s)a + sb)$, temos que g é limite uniforme de uma sequência de polinômios q_n. Logo, $q_n((t-a)/(b-a))$ é uma sequência de polinômios que aproxima h uniformemente. Isso conclui a demonstração do teorema. $\square$

No caso especial em que a função f é de classe C^k, $k \in \mathbb{N}$, a demonstração pode ser levemente modificada para mostrar que a i-ésima derivada de f (para $0 \leq i \leq k$) é aproximada pela sequência das i-ésimas derivadas dos polinômios p_n. Mais do que isso, a demonstração pode ser adaptada para funções reais de várias variáveis.

Uma consequência importante do Teorema de Aproximação de Weierstrass é que o espaço $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ é separável.

Capítulo 4

Em Espaços Métricos

4.1 Teorema de Ascoli-Arzelà em Espaços Métricos

Aqui apresentaremos uma generalização do Teorema 3.1.1 para subconjuntos de $\mathscr{C}(K;N)$, onde K e N são espaços métricos e K é compacto. Primeiro fazemos algumas definições.

Dizemos que um subconjunto X de um espaço métrico M é *relativamente compacto* quando seu fecho $\overline{X}$ é compacto. Pela Proposição 2.0.5, isso equivale a dizer que toda sequência de X possui uma subsequência convergente, a diferença aqui sendo que ela pode convergir para algum ponto fora de X.

Seja $\mathscr{F}$ um conjunto de funções $f : M \longrightarrow N$, onde M e N são espaços métricos. Dado $x \in M$, denotaremos $\mathscr{F}(x) = \{ f(x) \mid f \in \mathscr{F} \}$.

Lema 4.1.1. *Se uma sequência equicontínua de aplicações $f_n : M \longrightarrow N$ converge simplesmente para $f : M \longrightarrow N$, então o conjunto $\mathscr{F} = \{f, f_1, f_2, \dots\}$ é equicontínuo.*

Demonstração: Dado $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$, $d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Então, para todo $a \in M$,

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(g(x), g(a)) < \varepsilon,$$

qualquer que seja $g \in \mathscr{F}$.

□

O próximo lema é muito útil, pois nos diz que se as hipóteses são satisfeitas, é suficiente mostrar que a sequência converge simplesmente para que fique provado que ela converge uniformemente. A demonstração consiste basicamente de usar a equicontinuidade para montar uma cobertura aberta e, através da compacidade, extrair dela uma subcobertura finita.

Lema 4.1.2. *Sejam M, N espaços métricos. Se uma sequência equicontínua de aplicações $f_n : M \longrightarrow N$ converge simplesmente para $f : M \longrightarrow N$, então a convergência é uniforme em cada parte compacta $K \subset M$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Pela convergência simples, para cada $x \in M$, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_x \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$. Pelo Lema 4.1.1, $\{f, f_1, f_2, \dots\}$ é equicontínuo. Logo, cada $x \in M$ é centro de uma bola aberta B_x tal que $y \in B_x \Rightarrow d(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon/3$ e $d(f(y), f(x)) < \varepsilon/3$. Então, $\bigcup_{x \in K} B_x$ é cobertura aberta de K. Pela compacidade, existem $x_1, x_2, \dots, x_k \in M$ tais que $K \subset B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_k}$. Tome $n_0 = \max\{n_{x_1} \dots, n_{x_k}\}$.

Se $n > n_0$ e $x \in K$, então existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in B_{x_i}$. Então,

$$d(f_n(x), f(x)) \le d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

o que prova o lema.

□

O lema seguinte usa o anterior de base e mostra que, se cada $\overline{\mathscr{F}(x)}$ for completo, basta a sequência convergir simplesmente em um conjunto denso para que a convergência seja uniforme em cada parte compacta.

Lema 4.1.3. *Sejam M, N espaços métricos e seja $f_n : M \longrightarrow N$ uma sequência equicontínua de funções. Denotemos $\mathscr{F} = \{f_1, f_2, \dots\}$. Suponha que para cada $x \in M$, o conjunto $\mathscr{F}(x)$ tem fecho completo em N. Daí, se (f_n) converge simplesmente num subconjunto denso $D \subset M$, então (f_n) converge uniformemente em cada parte compacta de M.*

Demonstração: Note que, pelo Lema 4.1.2, é suficiente mostrar que (f_n) converge simplesmente em todo o espaço. Devido à completeza de $\overline{\mathscr{F}(x)}$, é suficiente mostrar que, para todo $x \in M$, a sequência $(f_n(x))$ é de Cauchy.

Tome $\varepsilon > 0$. Devido à equicontinuidade, para cada $x \in M$ existe $B(x, r)$ tal que se $y \in B(x, r) \Rightarrow d(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon/3$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, seja $y \in D \cap B(x, r)$. Sabemos que a sequência $(f_n(y))$ converge, portanto é de Cauchy. Assim, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(y), f_n(y)) < \varepsilon/3$, temos

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) \le d(f_m(x), f_m(y)) + d(f_m(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon,$$

o que mostra que a sequência é de Cauchy. □

Passemos ao teorema. A demonstração que apresentaremos aqui pode ser encontrada no capítulo 8 do livro [3].

Teorema 4.1.4 (Teorema de Ascoli-Arzelà em Espaços Métricos)**.** *Sejam K e N espaços métricos, com K compacto. O subconjunto $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(K; N)$ é relativamente compacto se, e somente se valem:*

1. *$\mathscr{F}$ é equicontínuo;*
2. *Para cada $x \in K$, o conjunto $\mathscr{F}(x)$ é relativamente compacto em N.*

Demonstração: Primeiro, suponha que $\mathscr{F}$ seja relativamente compacto. Para $x \in K$, seja $v_x : \mathscr{C}(K;N) \longrightarrow N$ dada por $v_x(f) = f(x)$. É um fato bem conhecido que esta função é contínua. Mas $v_x(\mathscr{F}) = \mathscr{F}(x)$. Como funções contínuas levam conjuntos compactos em conjuntos compactos, é fácil ver que elas levam conjuntos relativamente compactos em conjuntos relativamente compactos. Concluímos, então, que $\mathscr{F}(x)$ é relativamente compacto para todo $x \in K$.

Agora, tome $a \in K$ qualquer e $\varepsilon > 0$. A função $\varphi : \overline{\mathscr{F}} \times K \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(f,x) = d(f(x), f(a))$ é contínua, pois composição de funções contínuas é contínua. Através da Proposição 2.0.2, usando apenas a compacidade de $\overline{\mathscr{F}}$, obtemos $\delta > 0$ tal que, para toda $f \in \overline{\mathscr{F}}$, com $x, y \in K$

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow |\varphi(f,x) - \varphi(f,a)| < \varepsilon.$$

Isto é,

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow |d(f(x), f(a)) - d(f(a), f(a))| < \varepsilon$$

ou, mais precisamente,

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Isto mostra que $\overline{\mathscr{F}}$ é equicontínuo em todo ponto $a \in K$, o que implica que $\mathscr{F}$ também o é. Assim, as condições (1) e (2) são necessárias para que $\mathscr{F}$ seja relativamente compacto.

Para a recíproca, basta mostrar que toda sequência de $\mathscr{F}$ tem uma subsequência que converge. Como sabemos que, para todo $x \in K$, $\overline{\mathscr{F}(x)}$ é compacto, ele será completo. Daí, pelo Lema 4.1.3, basta provar que toda sequência de $\mathscr{F}$ tem uma subsequência que converge simplesmente em algum conjunto denso $D \subset K$. Para isso, estabeleceremos uma relação entre as restrições das funções a D e pontos de um conjunto compacto.

Seja $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ um subconjunto de K enumerável e denso, cuja existência é garantida pelo Corolário 2.0.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $L_n = \overline{\mathscr{F}(x_n)} \subset N$. Pela Proposição 2.0.8, o produto cartesiano $L = \prod_{i=1}^{\infty} L_n$ é compacto. Agora, associamos cada $f \in \mathscr{F}$ ao ponto f' de L que tem $f(x_n)$ como sua n-ésima coordenada. Note que f' é portanto, essencialmente a restrição de f a D. Consequentemente, a sequência de funções (f_n) converge simplesmente em D se, e somente se, a sequência (f'_n) converge em L. Como L é compacto, (f'_n) tem uma subsequência que converge, portanto a subsequência correspondente de (f_n) converge simplesmente em D. Pelo Lema 4.1.3, isto implica que esta subsequência converge uniformemente em K. Logo, $\mathscr{F}$ é relativamente compacto.

□

Agora observamos que, no caso em que $N \subset \mathbb{R}$ e $K = [a,b]$ para $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, a volta do teorema acima é apenas uma reformulação do Teorema 3.1.1. Fazemos isso mostrando que um pode facilmente ser provado a partir do outro.

Suponha primeiro que $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(K;N)$ é limitado e equicontínuo. A condição (1) do Teorema 4.1.4 está satisfeita. Além disso, como $\mathscr{F}$ é limitado, existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tal que $\|f\| < M$ para todo $f \in \mathscr{F}$. Mas então, para todo $x \in K$ e todo $f \in \mathscr{F}$, $|f(x)| < M$. Portanto, $\mathscr{F}(x) \subset \mathbb{R}$ é limitado. Mas, nos reais, um conjunto fechado e limitado é compacto. Assim, $\mathscr{F}(x)$ é relativamente compacto. Isso mostra que a condição (2) está satisfeita. Aplicando 4.1.4, temos que $\mathscr{F}$ é relativamente compacto. Mas, pelo Teorema 2.0.5, isso implica que $\mathscr{F}$ é totalmente limitado.

Agora, suponha que $\mathscr{F}$ é equicontínuo e que $\mathscr{F}(x)$ é relativamente compacto para todo $x \in K$. Queremos mostrar que $\mathscr{F}$ é limitado, para poder usar o Teorema 4.1.4. Como o fecho de $\mathscr{F}(x)$ é limitado, $\mathscr{F}(x)$ também é. Isto é, para $x \in K$, existe $M_x > 0$ tal que $|f(x)| < M_x$, para toda $f \in \mathscr{F}$. Agora, tome $x \in K$. Como $\mathscr{F}$ é equicontínuo, existe $r_x > 0$ tal que $|y - x| < r_x \implies |f(y) - f(x)| < 1,\ \forall f \in \mathscr{F}$. Mas então, $|y - x| < r_x \implies f(y) < M_x + 1,\ \forall f \in \mathscr{F}$. Como $\bigcup_{x \in K} B(x; r_x)$ é uma cobertura aberta de K, podemos extrair dela uma subcobertura finita $B(x_1; r_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_n; r_{x_n})$. Tome $M = \max\{M_{x_1}, \cdots, M_{x_n}\}$. Então, se $x \in K$, existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $x \in B(x_j; r_{x_j})$. Daí, $f(x) < M_{x_j} + 1 < M + 1$, para toda $f \in \mathscr{F}$. Isso prova que $\mathscr{F}$ é limitado.

4.2 Teorema de Ascoli-Arzelà em Espaços Métricos Localmente Compactos Separáveis

Como já foi discutido quando o visitamos na reta, uma aplicação importante do Teorema de Ascoli-Arzelà é como ferramenta para mostrar que uma sequência de funções contínuas definidas em um compacto possui uma subsequência que converge uniformemente. Suponha, no entanto, que queremos estudar uma sequência de funções definidas em um espaço métrico que não seja compacto. É fácil verificar que as condições do Teorema 4.1.4 não são suficientes para garantir a convergência uniforme de uma subsequência em todo o espaço. De fato, tomando a sequência $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x/n$, é fácil verificar que ela é equicontínua e limitada em cada $x \in \mathbb{R}$. No entanto, nenhuma subsequência dela converge uniformemente em toda a reta.

Por outro lado, podemos aplicar 4.1.4 em cada parte compacta K de $\mathbb{R}$, concluindo assim que (f_n) possui uma subsequência que converge uniformemente em K. Note, porém, que nada nos garante que é a mesma subsequência que converge em cada compacto.

Com essa discussão em mente, podemos pensar em definir uma noção de convergência de sequências de funções definidas em todo $\mathbb{R}$, mais fraca do que a convergência uniforme, na qual dizemos que uma sequência converge a uma função g se, em cada parte compacta de $\mathbb{R}$, a sequência converge uniformemente para g. Vejamos agora que, dados M e N espaços métricos, pode ser definida em $\mathscr{C}(M, N)$ uma métrica que dá origem a essa noção de convergência, desde que M seja localmente compacto e separável. Note que M não precisa ser compacto.

Primeiro, observe que poderíamos escolher m compactos $L_1, \cdots, L_m$ em M e definir em $\mathscr{C}(M, N)$ a métrica

$$d_m(f,g) = d(f|L_1, g|L_1) + \cdots + d(f|L_m, g|L_m),$$

onde d é a métrica da convergência uniforme, que está bem definida quando nos restringimos a um pedaço compacto do domínio. É fácil notar que se temos uma sequência (f_n) que converge para g segundo a métrica d_m, então (f_n) converge uniformemente para g em $L_1, L_2, \cdots, L_m$. Na verdade, mesmo se a quantidade de compactos fosse infinita enumerável, ainda poderíamos definir

$$d_{\mathbb{N}}(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(f|L_i, g|L_i)}{1 + d(f|L_i, g|L_i)}.$$

Novamente, se (f_n) convergisse para g segundo essa métrica, (f_n) convergiria uniformemente em $L_1, L_2, \cdots$. No entanto, isso ainda não é suficiente para garantir que a sequência convergiria em todos os compactos do espaço, uma vez que a quantidade deles poderia ser não enumerável. Felizmente, como M é localmente compacto e separável, garantir a convergência em uma quantidade enumerável de compactos será suficiente para garantir a convergência em todos eles.

De fato, pela Proposição 2.0.10, existem $K_1, K_2, \cdots$ compactos em M tais que $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Seja $K \subset M$ compacto. Daí, $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} K_n$ é uma cobertura de K, da qual podemos extrair uma subcobertura finita $K \subset \operatorname{int} K_{n_1} \cup \cdots \cup \operatorname{int} K_{n_p}$. Assumindo, sem perda de generalidade, que $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$, temos que $\operatorname{int} K_{n_1} \cup \cdots \cup \operatorname{int} K_{n_p} = \operatorname{int} K_{n_p} \subset K_{n_p}$. Então $K \subset K_{n_p}$. Assim, se (f_n) converge a g em cada K_i, ela converge a g em todo compacto K de M, pois K estará dentro de algum K_j.

Então tomando

$$d^*(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(f|K_i, g|K_i)}{1 + d(f|K_i, g|K_i)},$$

temos uma métrica em $\mathscr{C}(M,N)$ segundo a qual uma sequência (f_n) converge a g se, e somente se, (f_n) converge a g uniformemente em cada parte compacta de M. Nosso objetivo, agora, é provar uma versão do Teorema de Ascoli-Arzelà no espaço métrico $(\mathscr{C}(M,N), d^*)$.

Primeiro considere a função

$$\varphi : (\mathscr{C}(M,N), d^*) \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}(K_i, N)$$

dada por $\varphi(f) = (f|K_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Se consideramos $\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}(K_i, N)$ munido da métrica produto, então φ é uma imersão isométrica.

Lema 4.2.1. *A imagem de φ é subconjunto fechado de $\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}(K_i, N)$.*

Demonstração: Seja F a imagem de φ. Note que F é formado pelas sequências de funções $u = (u_i)$ tais que $i < j \implies u_i = u_j|K_i$. Suponha, por contradição, que $v = (v_i) \in \overline{F}$ e $v \notin F$. Daí, existem $i < j$ e $x \in K_i$ tais que $v_i(x) \neq v_j(x)$. Seja $\varepsilon = |v_i(x) - v_j(x)| > 0$. Tome $u = (u_i) \in F$ tal que $d^*(u,v) < \frac{1}{2^j} \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$. Como

$u_i(x) = u_j(x)$, pela desigualdade triangular,

$$\varepsilon = |v_i(x) - v_j(x)| \leq |v_i(x) - u_i(x)| + |u_j(x) - v_j(x)|$$

Então $|u_i(x) - v_i(x)| \geq \varepsilon/2$ ou $|u_j(x) - v_j(x)| \geq \varepsilon/2$ pois, caso ambas as afirmações fossem falsas, haveria uma contradição. Como os dois casos são similares, suponha $|u_i(x) - v_i(x)| \geq \varepsilon/2$. Então $d(u_i, v_i) \geq \varepsilon/2$. Uma vez que a função $x/(1+x)$ é crescente, temos

$$\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} = \frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2} \leq \frac{d(u_i, v_i)}{1+d(u_i, v_i)}.$$

Mas então,

$$d^*(u,v) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d(u_m, v_m)}{1+d(u_m, v_m)} \geq \frac{1}{2^i} \frac{d(u_i, v_i)}{1+d(u_i, v_i)} \geq \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \geq \frac{1}{2^j} \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon},$$

o que é uma contradição. Assim, F é fechado. □

Agora, estamos prontos para enunciar o Teorema. A demonstração a seguir pode ser encontrada no capítulo 8 do livro [3].

Teorema 4.2.2 (Teorema de Ascoli-Arzelà em Espaços Métricos Localmente Compactos e Separáveis)**.** *Se M é espaço métrico localmente compacto e separável, então um conjunto $E \subset (\mathscr{C}(M, N), d^*)$ é relativamente compacto se, e somente se valem:*

1. *E é equicontínuo;*

2. *$E(x) \subset N$ é relativamente compacto, para cada $x \in M$.*

Demonstração: Devido à isometria $\varphi : (\mathscr{C}(M, N), d^*) \longrightarrow F$, temos que estes dois espaços são homeomorfos. Então E é relativamente compacto em $(\mathscr{C}(M, N), d^*)$ se, e somente se, $\varphi(E)$ é relativamente compacto em F. Mas, pelo Lema 4.2.1, F é fechado em $\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}(K_i, N)$. Afirmamos que $\varphi(E)$ é relativamente compacto em F se, e somente se, $\varphi(E)$ é relativamente compacto em $\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}(K_i, N)$. De fato, se toda sequência em $\varphi(E)$ possui uma subsequência que converge para um elemento de F, a mesma subsequência converge para um elemento de $\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}(K_i, N)$. Por outro lado, se toda sequência em $\varphi(E)$ possui uma subsequência que converge a um elemento de $\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}(K_i, N)$, como $\varphi(E) \subset F$ e F é fechado, este elemento precisa estar em F.

Então, E é relativamente compacto em $(\mathscr{C}(M, N), d^*)$ se, e somente se, $\varphi(E)$ é relativamente compacto em $\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}(K_i, N)$. Mas, pela Proposição 2.0.8, para isso ocorrer é necessário e suficiente que cada projeção $p_i(\varphi(E)) \subset \mathscr{C}(K_i, N)$ seja relativamente compacta. Porém,

$$p_i(\varphi(E)) = E|K_i \ (= \{f|K_i : f \in E\}).$$

Como as condições (1) e (2) valem para E se, e somente se, valem para cada $E|K_i$, a demonstração segue do Teorema 4.1.4. $\square$

Agora, usaremos o Teorema 4.2.2 para obter uma versão bem mais geral do Corolário 3.1.2, que pode ser usada mesmo quando o domínio da sequência não é compacto.

Dizemos que um conjunto E de aplicações $f : M \longrightarrow N$ é *pontualmente limitado* quando $E(x) \subset N$ é limitado para todo $x \in M$. Uma sequência é pontualmente limitada se o conjunto dos seus termos é pontualmente limitado.

Corolário 4.2.3. *Seja M espaço métrico localmente compacto separável e seja $k \in \mathbb{N}$. Então toda sequência equicontínua e pontualmente limitada de aplicações $f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ possui uma subsequência que converge uniformemente em cada parte compacta de M.*

Demonstração: De fato, em $\mathbb{R}^k$, todo conjunto limitado é relativamente compacto. Basta, então, aplicar o Teorema 4.2.2 ao conjunto $E = \{f_1, f_2, \cdots\}$. $\square$

4.3 Teorema de Stone-Weierstrass em Espaços Métricos

Em 1937, M. Stone descobriu uma forma de generalizar o Teorema de Aproximação de Weierstrass, fazendo com que ele agora se aplique a funções contínuas definidas em um espaço topológico X que apenas precisa ser Hausdorff e compacto. Este é o chamado Teorema de Stone-Weierstrass. Veremos, primeiro, o caso em que X é espaço métrico compacto. Começamos fazendo algumas definições.

Podemos definir uma multiplicação em $\mathscr{C}(M;\mathbb{R})$, tomando que para $f, g \in \mathscr{C}(M;\mathbb{R})$, $f \cdot g$ é a função dada por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Um subconjunto $A \subset \mathscr{C}(M;\mathbb{R})$ é dito *subálgebra* de $\mathscr{C}(M;\mathbb{R})$ se é espaço vetorial e se $f, g \in A \Rightarrow f \cdot g \in A$. A intersecção de uma família arbitrária de subálgebras é subálgebra. Damos o nome de subálgebra gerada por $S \subset \mathscr{C}(M;\mathbb{R})$ à intersecção de todas as subálgebras que contém S. Denotaremos esta subálgebra por $A(S)$. Observamos, ainda, que o fecho de uma subálgebra é subálgebra.

Usaremos as seguintes notações:

Dadas $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f \vee g)$ e $(f \wedge g)$ são as funções de M sobre $\mathbb{R}$ dadas por $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, para todo $x \in M$. Se f e g forem contínuas, $f \vee g$ e $f \wedge g$ também serão.

Lema 4.3.1. *Existe uma sequência de polinômios p_n tais que $\lim_{n\to\infty} p_n(t) = \sqrt{t}$ uniformemente para $t \in [0,1]$*

Demonstração: O primeiro passo é construir uma sequência de polinômios cujo limite simples seja $\sqrt{t}$. Esta sequência é definida indutivamente, pondo $p_0 = 0$ e

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}[t - p_n^2(t)].$$

Para um dado $t \in [0,1]$, seja $f_t : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_t(x) = x + (t - x^2)/2$. Então $f_t'(x) = 1 - x \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Assim, f_t é crescente. Além disso, $f_t(0) = t/2$ e $f_t(\sqrt{t}) = \sqrt{t}$. Portanto, se $0 \leq x \leq \sqrt{t}$, então $0 \leq t/2 \leq f_t(x) \leq \sqrt{t}$. Sabemos que $p_0(t) = 0$. Então $0 \leq p_0(t) \leq \sqrt{t}$. Também sabemos que $p_1(t) = f_t(p_0(t))$. Logo, $0 \leq p_1(t) \leq \sqrt{t}$. Daí $p_1(t)$ está no domínio de f_t e $p_2(t) = f_t(p_1(t))$, o que implica que $0 \leq p_2(t) \leq \sqrt{t}$. Por indução, para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$. É bom lembrar que esta desigualdade vale para todo $t \in [0,1]$. Usando ela, temos que

$$p_n^2(t) \leq t \Rightarrow -p_n^2(t) \geq -t \Rightarrow t - p_n^2(t) \geq 0 \Rightarrow \frac{t - p_n^2(t)}{2} \geq 0 \Rightarrow p_n(t) + \frac{t - p_n^2(t)}{2} \geq p_n(t),$$

e portanto,

$$p_n(t) \leq p_{n+1}(t).$$

Então, demonstramos que, dado $t \in [0,1]$, a sequência $(p_n(t))$ é crescente e limitada por $\sqrt{t}$, portanto converge. Para cada tal t, definimos $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t)$. Fazendo $n \to \infty$ na definição indutiva de $p_{n+1}(t)$, obtemos $\varphi(t) = \varphi(t) + (t - \varphi^2(t))/2$ o que implica $\varphi(t) = \sqrt{t}$. Pela Proposição 2.0.4, a convergência é uniforme. Observe que $p_n(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema 4.3.2. *Em qualquer intervalo compacto $[a,b]$, a função $f(x) = |x|$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios desprovidos de termo constante.*

Demonstração: Primeiro, observamos que podemos assumir que o intervalo é da forma $[-a,a]$ para algum $a > 0$, uma vez que existe um intervalo dessa forma que contém o intervalo original. Mais do que isso, podemos supor que $a = 1$, uma vez que se (p_n) é uma sequência de polinômios que aproxima $|x|$ em $[-1,1]$, tomando $q_n(t) = a \cdot p_n(t/a)$ obtemos uma sequência de polinômios que aproxima $|x|$ em $[-a,a]$. Por fim, tomando uma sequência p_n de polinômios que aproxima $\sqrt{t}$ em $[0,1]$, cuja existência é garantida pelo Lema 4.3.1, temos que $q_n(t) = p_n(t^2)$, que é também sequência de polinômios, converge uniformemente para $\sqrt{t^2} = |t|$ quando $t \in [-1,1]$. Como $p_n(0) = 0$, $q_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, os polinômios que aproximam $|x|$ são desprovidos de termo constante. $\square$

Lema 4.3.3. *Sejam $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas no espaço métrico compacto M. Então $|f| \in \overline{A(f)}$, $f \vee g \in \overline{A(f,g)}$ e $f \wedge g \in \overline{A(f,g)}$. Consequentemente, se $A \subset \mathscr{C}(M;\mathbb{R})$ é uma subálgebra e $f, f_1, \ldots, f_n \in A$ então $|f| \in \overline{A}$, $f_1 \vee \cdots \vee f_n \in \overline{A}$, $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \in \overline{A}$.*

Demonstração: Pela Proposição 2.0.3, f atinge máximo e mínimo em M. Sejam $a = \min_{x\in M} f(x)$ e $b = \max_{x\in M} f(x)$. Pelo Lema 4.3.2 podemos tomar $p_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de polinômios desprovidos de termos constantes que converge uniformemente para $|x|$ em $[a,b]$. Então $\lim_{n\to\infty} p_n(f(x)) = |f(x)|$ uniformemente em M. Note que $p_n \circ f$ é uma função da forma $c_1 \cdot f + c_2 \cdot f^2 + \cdots + c_n \cdot f^n$, em que $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Portanto, $(p_n \circ f) \in A(f)$. Daí, o limite da sequência pertence ao fecho de $A(f)$. Isto é,

$|f| \in \overline{A(f)}$. Mas então $|f-g| \in \overline{A(f-g)} \subset \overline{A(f,g)}$. Não é difícil verificar que

$$f \vee g = \frac{1}{2}[f+g+|f-g|]$$

e

$$f \wedge g = \frac{1}{2}[f+g-|f-g|].$$

Como o fecho de uma subálgebra também é subálgebra, isso nos mostra que $(f \vee g), (f \wedge g) \in \overline{A(f,g)}$.

Por fim, se $A \subset \mathscr{C}(M;\mathbb{R})$ é uma subálgebra e $f, f_1, \ldots, f_n \in A$, então $A(f) \subset A$ e $A(f_1, \ldots, f_n) \subset A$. Logo, $|f| \in \overline{A}$, $f_1 \vee \cdots \vee f_n \in \overline{A}$, $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \in \overline{A}$. □

Fazemos, agora, uma última definição. Dizemos que $S \subset \mathscr{C}(M;\mathbb{R})$ *separa os pontos de* M quando, dados $x \neq y$ em M, existe $f \in S$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Lema 4.3.4. *Seja $A \subset \mathscr{C}(M;\mathbb{R})$ uma subálgebra que separa pontos e contém as funções constantes. Dados arbitrariamente $x \neq y$ em M e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existe $f \in A$ tal que $f(x) = \alpha$ e $f(y) = \beta$.*

Demonstração: Como $x \neq y$, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Queremos usar essa g para construir a função f desejada. Como A é álgebra e contém as constantes, podemos operar g para obter uma função que atinja os valores desejados. De fato, basta solucionar o seguinte sistema linear nas incógnitas s e t:

$$\begin{cases} s \cdot g(x) + t = \alpha \\ s \cdot g(y) + t = \beta \end{cases}.$$

Como o determinante do sistema é $g(x) - g(y) \neq 0$, ele possui solução única. Se (s,t) é esta solução, tomando $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = s \cdot g + t$ obtemos uma função que está em A e satisfaz as condições desejadas. □

Logo a seguir, apresentaremos uma demonstração do Teorema de Stone-Weierstrass, que pode ser encontrada no capítulo 8 do livro [3]. Dada uma função contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, queremos encontrar uma função no fecho da subálgebra A que aproxima ela. A ideia é usar o Lema 4.3.4 para encontrar funções em A que tem o mesmo valor que f em determinados pontos. Devido à continuidade, essas funções aproximam f ao redor desses pontos de coincidência. Construímos uma cobertura aberta do domínio usando esse fato, e usamos a compacidade de M para encontrar uma subcobertura finita. Depois, usamos essa subcobertura para montar uma função nova, feita dos pedaços das funções que estão localmente próximas de f. Como a subcobertura é finita, essa função será feita de uma quantidade finita de pedaços. Pelo Lema 4.3.3, isso garante que a função nova está no fecho de A.

Teorema 4.3.5 (Teorema de Stone-Weierstrass em Espaços Métricos)**.** *Sejam M um espaço métrico compacto e $A \subset \mathscr{C}(M;\mathbb{R})$ uma subálgebra de funções contínuas que contém as constantes e separa os pontos. Então A é* *denso em $\mathscr{C}(M;\mathbb{R})$. Isto é, toda função contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções pertencentes a A.*

Demonstração: É suficiente mostrar que para toda $f \in \mathscr{C}(M;\mathbb{R})$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $g \in \overline{A}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in M$. Dados arbitrariamente $x, y \in M$, existe $g_{xy} \in A$ tal que $g_{xy}(x) = f(x)$ e $g_{xy}(y) = f(y)$. Isto nos é garantido pelo Lema 4.3.4 quando $x \neq y$ e é trivial se $x = y$.

Fixando $x \in M$, devido à continuidade, cada ponto $y \in M$ possui uma vizinhança aberta V_{xy} tal que $z \in V_{xy} \Rightarrow g_{xy}(z) > f(z) - \varepsilon$. Assim, $\bigcup_{y \in M} V_{xy}$ é cobertura aberta de M. Devido à compacidade de M, existem $y_1, \ldots, y_n \in M$ tais que $M = V_{xy_1} \cup \cdots \cup V_{xy_n}$. Seja $g_x = g_{xy_1} \vee \cdots \vee g_{xy_n}$. O Lema 4.3.3 nos diz que $g_x \in \overline{A}$. Fora isso, como $g_{xy}(x) = f(x)$ para todo y, então $g_x(x) = f(x)$. Por fim, qualquer que seja $z \in M$, existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $z \in V_{xy_i}$, o que implica que $g_{xy_i}(z) > f(z) - \varepsilon$. Como g_x é definida tomando o máximo de todas as g_{xy_k} em cada ponto, isso nos garante que $g_x(z) > f(z) - \varepsilon$ para todo $z \in M$.

Por continuidade, cada ponto $x \in M$ possui uma vizinhança U_x tal que $z \in U_x \Rightarrow g_x(z) < f(z) + \varepsilon$. Sendo M compacto, existem $x_1, \ldots, x_m \in M$ tais que $M = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$. Seja $g = g_{x_1} \wedge \cdots \wedge g_{x_m}$. O Lema 4.3.3 garante que $g \in \overline{A}$. Já sabemos que, para todo $z \in M$, $g(z) > f(z) - \varepsilon$. Além disso, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $z \in U_{x_j}$. Daí, $g_{x_j}(z) < f(z) + \varepsilon$. Como g é definida em cada ponto como o mínimo das g_{x_k}, isso nos garante que $g(z) < f(z) + \varepsilon$. Combinando os dois resultados, para todo $z \in M$, $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$.

Isto conclui a demonstração. □

Existe ainda uma forma complexa do Teorema de Stone Weierstrass, que nos dá uma condição suficiente para uma subálgebra ser densa em $\mathscr{C}(M;\mathbb{C})$, para M compacto. Dessa vez, no entanto, além de exigir que a subálgebra separe os pontos de M e contenha as funções constantes, também precisamos impor que ela seja autoadjunta, isto é, que ela contenha a função conjugada de cada uma das suas funções. A demonstração desse resultado pode ser feita com facilidade usando a forma real do Teorema de Stone-Weierstrass.

Capítulo 5

Em Espaços Topológicos

Veremos, agora, que tanto o Teorema de Stone-Weierstrass como o Teorema de Ascoli-Arzelà podem ser generealizados para espaços topológicos Hausdorff compactos. Começamos com o Teorema de Stone-Weierstrass, por ser o mais simples neste caso.

5.1 Teorema de Stone-Weierstass em Espaços Topológicos

Apresentaremos aqui uma versão modificada da demonstração dada em [4]. O texto citado utiliza uma técnica similar a partições da unidade, mas as alterações feitas aqui tornam possível o uso do conceito verdadeiro. Começamos definindo os conceitos que serão necessários para um espaço topológico X qualquer.

Dizemos que uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X é *localmente finita* quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito dos conjuntos C_λ.

Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos o seu *suporte*:

$$supp(f) = \overline{\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}}.$$

Observe que se $x \notin supp(f)$, então existe uma vizinhança de x onde f é identicamente nula.

Seja $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de funções $\varphi_\lambda : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que a família $(supp(\varphi_\lambda))_{\lambda \in L}$ é localmente finita. Então, para todo $x \in X$, temos apenas uma quantidade finita de funções φ_λ para as quais $\varphi_\lambda(x) \neq 0$. Então, podemos definir a função $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, pondo $\varphi = \sum_{\lambda \in L} \varphi_\lambda$. Observe que se para todo $\lambda \in L$, φ_λ for contínua, então φ será contínua. De fato, para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança de x na qual φ é igual a uma soma finita de funções contínuas em x. Portanto, φ será contínua em x.

Uma *partição da unidade em* X é uma família $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in L}$ de funções contínuas $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que:

1. Para todo $\lambda \in L$, $0 \leq \varphi_\lambda$.

2. A família $(supp(\varphi_\lambda))_{\lambda \in L}$ é localmente finita em X.

3. $\sum_{\lambda \in L} \varphi_\lambda = 1$.

Dizemos que uma partição da unidade $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in L}$ é *estritamente subordinada à cobertura* $(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ se, para cada $\lambda \in L$, $supp(\varphi_\lambda) \subset C_\lambda$.

Agora, seja X um espaço topológico Hausdorff compacto. Começamos observando que, se $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ é uma subálgebra que contém as funções constantes, então, para toda $f \in A$ e todo polinômio p, temos que $p \circ f \in A$. De fato, tal composição será uma função da forma

$$a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e $a_n, \cdots, a_0 \in \mathbb{R}$. Sabemos que esta função está em A devido às propriedades de álgebra. Assim, encontrando uma função na álgebra com determinado comportamento e compondo-a com um polinômio apropriado, podemos provar a existência de uma função de interesse na álgebra. Esta ideia revela uma nova aplicação do Teorema de Aproximação de Weierstrass: Podemos usá-lo para mostrar que uma função específica está no fecho da álgebra.

Lema 5.1.1. 1. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b < 1$, existe uma sequência de polinômios $p_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que aproxima uniformemente a função $r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$r(x) = \begin{cases} 1 & se\ 0 \leq x \leq a \\ \frac{x-a}{a-b} + 1 & se\ a < x < b\ . \\ 0 & se\ b \leq x \leq 1 \end{cases}$$

2. *Dado $M \in \mathbb{R}$, com $M \geq 1$, existe uma sequência de polinômios $q_n : [1, M] \longrightarrow \mathbb{R}$ que aproxima uniformemente a função $\frac{1}{x}$ no intervalo $[1, M]$.*

Demonstração: De fato, tanto a função r como a função $\frac{1}{x}$ são contínuas e definidas em um intervalo compacto. O lema segue do Teorema 3.2.4. □

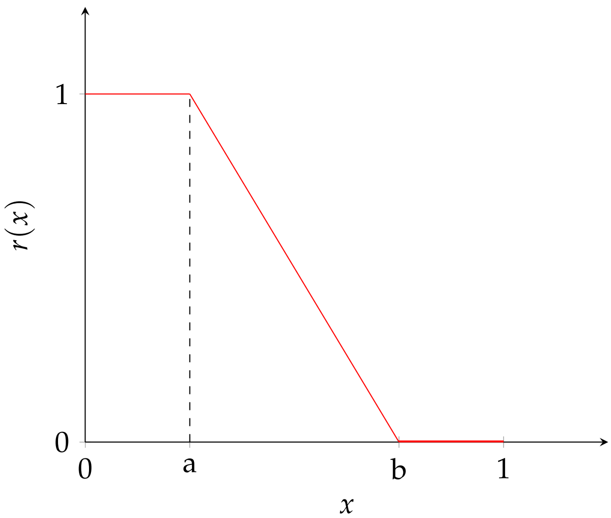
Lema 5.1.2. *Sejam X um espaço topológico Hausdorff compacto e $A \subset \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ uma subálgebra que contém as constantes e que separa pontos. Seja $x \in X$ e U vizinhança aberta de x. Daí existe $V \subset U$ vizinhança aberta de x e $\varphi \in \overline{A}$ tal que:*

1. $0 \leq \varphi \leq 1$;

2. $supp(\varphi) \subset U$;

3. $\varphi(s) = 1, \forall s \in V$.

Demonstração: Note que a parte 1 do Lema 5.1.1 simplifica bastante nosso trabalho. De fato, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b < 0$, a função r citada nela tem o seguinte gráfico:



Então, basta encontrar uma função em A que "mantenha alguma distância" entre os pontos fora de U e 0. Isto é, se conseguirmos encontrar uma constante $c > 0$ e uma função $\psi \in A$, $0 \leq \psi \leq 1$, tal que $x \notin U \implies \psi(x) > c > 0$, podemos escolher $0 < a < b < c < 1$, e tomar r como no enunciado da parte 1 do Lema 5.1.1. A composição $r \circ \psi$, portanto, se anulará em todos os pontos fora de U e estará em $\overline{A}$.

O primeiro passo para encontrarmos a função $\psi \in A$ desejada é encontrar, para um dado $t \neq x$, uma função que se anule em x e valha 1 em t. Usamos o fato de que A separa pontos.

Seja $t \in X$, $t \neq x$. Sabemos que existe uma função $f_t \in A$ tal que $f_t(t) \neq f_t(x)$, então $f_t(t) - f_t(x) \neq 0$. Definimos então $g_t : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $g_t(s) = \frac{f_t(s)-f_t(x)}{f_t(t)-f_t(x)}$. Observe que $g_t(x) = 0$ e $g_t(t) = 1$. Além disso, $g_t \in A$, pois ela pode ser obtida multiplicando f_t por um escalar e depois somando o resultado a uma constante. Agora, definimos h_t pondo $h_t(s) = g_t^2(s)$. Note que $h_t \in A$ pois é produto de funções em A. Temos então que $h_t(x) = 0$, $h_t(t) = 1$ e $h_t \geq 0$.

Como, para todo $t \neq x$, a função h_t é contínua e vale 1 em t, existe uma vizinhança de t que é "mantida a alguma distância" de zero por h_t. Nossa abordagem agora é usar várias dessas vizinhanças para cobrir $X \setminus U$. Combinando as funções h_t correspondentes, obteremos uma função que faz isso para todos os pontos fora de U.

Seja $K = X \setminus U$. Como K é fechado e X é compacto, K é compacto. Para cada $t \in X$ com $t \neq x$, defina

$$V_t = \{ s \in \mathrm{X} \mid h_t(s) > 1/2 \}.$$

Note que V_t é vizinhança aberta de t, uma vez que h_t é contínua e $t \in V_t$. Então $\bigcup_{t \in K} V_t$ é uma cobertura aberta de K. Pela compacidade de K, existem $t_1, \cdots, t_n \in K$ tais que $K \subset V_{t_1} \cup \cdots \cup V_{t_n}$. Tome $h = \sum_{j=1}^{n} h_{t_j}$. h, sendo somatória finita de funções em A, está em A. Além disso, se $t \in K$, existe $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $t \in V_{t_k}$. Daí:

$$h(t) = \sum_{j=1}^{n} h_{t_j} \geq h_{t_k}(t) > \frac{1}{2}.$$

Por fim, como h é contínua definida em um compacto, sua norma em X está bem definida. Tomando

$\psi(s) = \frac{h(s)}{\|h\|}$, temos que $0 \leq \psi \leq 1$ e, se $t \in K$, $\psi(t) > \frac{1}{2\|h\|}$.

Seja $c = \frac{1}{2\|h\|}$. Tome $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b < c < 1$ e aplique a parte 1 do Lema 5.1.1 para obter uma sequência de polinômios $p_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que aproxima uniformemente a função r que corresponde aos a e b escolhidos. Para cada n, $p_n \circ \psi \in A$. Além disso, a sequência $(p_n \circ \psi)$ converge uniformemente para $r \circ \psi$. Então $r \circ \psi \in \overline{A}$. Seja $\varphi = r \circ \psi$.

Mostremos que φ é a função desejada. De fato, $0 \leq \varphi \leq 1$. Também vimos que $s \in K \implies \psi(s) > c \implies \varphi(s) = 0$. Mas então, tomando $W = \{ s \in X \mid \varphi(s) \neq 0 \}$ e $Z = \{ s \in X \mid \psi(s) \leq c \}$, temos $W \subset Z \subset U$. Como Z é fechado, $supp(\varphi) = \overline{W} \subset Z \subset U$. Então $supp(\varphi) \subset U$. Por fim, tome $V = \{ s \in X \mid \psi(s) < a \}$. Daí V é vizinhança aberta de x e, se $s \in V$, $\varphi(s) = 1$. Isso conclui a demonstração. □

Lema 5.1.3. *Sejam X um espaço topológico Hausdorff compacto e $A \subset \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ subálgebra que contém as constantes e separa pontos. Para cada $x \in X$, seja U_x vizinhança aberta de x. Daí, existem $x_1, \cdots, x_n \in X$ e $g_1, \cdots, g_n \in \overline{A}$ tais que $(g_i)_{i=1}^n$ é partição da unidade estritamente subordinada a $(U_{x_i})_{i=1}^n$.*

Demonstração: Pelo Lema 5.1.2, para cada U_x obtemos V_x uma vizinhança aberta de x e uma função φ_x. Veja que $\bigcup_{x \in X} V_x$ é cobertura aberta de X. Pela compacidade de X, é possível obter $x_1, \cdots, x_n \in X$ tais que $X \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Definimos então $\psi = \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}$. Se $x \in X$, existe $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $x \in V_{x_k}$. Mas então $\psi(x) \geq \varphi_{x_k}(x) = 1 > 0$. Isto é, a função ψ nunca se anula em X. Por fim, tome $g_j = \frac{\varphi_{x_j}}{\psi}$, $j = 1, \cdots, n$.

Seja $j \in \{1, \cdots, n\}$. Primeiro, note que como ψ é soma de funções em $\overline{A}$, e como fecho de subálgebra é subálgebra, então $\psi \in \overline{A}$. Agora, ψ é função contínua definida em um compacto. Pela Proposição 2.0.3, ψ atinge máximo em X. Denotamos ele por M. Pela parte 2 do Lema 5.1.1, obtemos uma sequência de polinômios $q_n : [1, M] \longrightarrow \mathbb{R}$ que aproxima $\frac{1}{x}$ uniformemente no intervalo $[1, M]$. Então, a sequência $q_n \circ \psi$, que está em $\overline{A}$, aproxima uniformemente $\frac{1}{\psi}$ em X. Como $\overline{A}$ é fechado, isto mostra que $\frac{1}{\psi} \in \overline{A}$. Portanto, g_j é produto de funções em $\overline{A}$, que é álgebra. Assim, está em $\overline{A}$.

Para cada j, $\varphi_j \geq 0$. Daí, $g_j \geq 0$. Também, a família $(supp(g_i))_{i=1}^n$ é finita, portanto localmente finita em X. Por fim, se $x \in X$, temos

$$\sum_{j=1}^n g_j(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_{x_j}(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{\psi(x)} \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}(x) = \frac{\psi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

Então, a família $(g_i)_{i=1}^n$ é partição da unidade em X. Além disso, para cada j, temos que $supp(g_j) \subset U_{x_j}$, pois $supp(\varphi_{x_j}) \subset U_{x_j}$. Então ela é estritamente subordinada a $(U_{x_i})_{i=1}^n$. □

Agora, estamos prontos para provar o teorema. Note que para provar que A é denso em $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$, é suficiente mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ e toda $f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$, existe $g \in \overline{A}$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon$. Nossa abordagem será a seguinte: para cada $x \in X$, definimos $V_x = \{y \in X : |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Observe que cada V_x é uma vizinhança aberta de x em que a função f é aproximada pela função constante $f(x)$. Utilizando a compacidade de X, obteremos uma cobertura $X \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Note que as constantes

$f(x_1), \cdots, f(x_n)$ são funções em $\overline{A}$ que aproximam f em pequenas regiões, e essas regiões juntas cobrem X. O único problema é que se construíssemos uma função que aproximasse f em todo X "colando" as constantes, ela não seria contínua e, mesmo se fosse, poderia não pertencer a $\overline{A}$. A solução é fazer uma espécie de "colagem suave" usando a partição da unidade do Lema 5.1.3.

Para que a ideia fique mais clara, vejamos o que aconteceria se $n = 2$. Neste caso, $X \subset V_{x_1} \cup V_{x_2}$ e temos $g_1, g_2 \in \overline{A}$ como no Lema 5.1.3. Definimos então $g = f(x_1) \cdot g_1 + f(x_2) \cdot g_2$. Seja $x \in X$. Se $x \in V_{x_1} \setminus V_{x_2}$, $g(x) = f(x_1)$, pois $x \notin supp(g_2)$. Da mesma forma, se $x \in V_{x_2} \setminus V_{x_1}$, $g(x) = f(x_2)$. Em ambos estes casos, g aproxima f pela própria definição de V_{x_1} e V_{x_2}. Por outro lado, se $x \in V_{x_1} \cap V_{x_2}$, $g(x) = f(x_1) \cdot g_1(x) + f(x_2) \cdot g_2(x)$. Como $g_1(x), g_2(x) \geq 0$ e $g_1(x) + g_2(x) = 1$, neste último caso $g(x)$ é uma média ponderada de $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Portanto, o valor $g(x)$ está entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Como $x \in V_{x_1} \cap V_{x_2}$, as funções $f(x_1)$ e $f(x_2)$ ambas aproximam f, portanto g também aproxima f neste conjunto. Então, a função g aproxima f em todo X, mas o mais interessante é que g é contínua e pertence a $\overline{A}$. Passemos a considerações mais rigorosas.

Teorema 5.1.4 (Teorema de Stone-Weierstrass em Espaços Topológicos)**.** *Seja X espaço topológico Hausdorff compacto. Se $A \subset \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ é subálgebra que contém as constantes e separa pontos de X, então A é densa em $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Seja $f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$, definimos:

$$V_x = \{y \in X : |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Como f é contínua, V_x é vizinhança aberta de x. Pelo Lema 5.1.3, existem $x_1, \cdots, x_n \in X$ e $g_1, \cdots, g_n \in \overline{A}$ tais que $(g_i)_{i=1}^n$ é partição da unidade estritamente subordinada a $(V_{x_i})_{i=1}^n$. Definimos $g = f(x_1) \cdot g_1 + \cdots + f(x_n) \cdot g_n \in \overline{A}$.

Daí, se $x \in X$,

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) \cdot 1 - g(x)| = |f(x) \cdot \sum_{i=1}^n g_i(x) - \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot g_i(x)| \leq \sum_{i=1}^n g_i(x)|f(x) - f(x_i)|.$$

Agora, seja $J = \{j \in \{1, \cdots, n\} \mid x \in V_{x_j}\}$. Mas, se $x \notin V_{x_k}$, $g_k(x) = 0$. Ao mesmo tempo, se $x \in V_{x_k}$, $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon/2$. Daí,

$$|f(x) - g(x)| \leq \sum_{i=1}^n g_i(x)|f(x) - f(x_i)| = \sum_{i \in J} g_i(x)|f(x) - f(x_i)| \leq \sum_{i \in J} g_i(x)\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, $\|f - g\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Isso conclui a demonstração do teorema. $\square$

5.2 Teorema de Ascoli-Arzelà em Espaços Topológicos

Para provar o Teorema de Ascoli-Arzelà em espaços topológicos, usaremos uma abordagem bastante diferente da que foi vista em espaços métricos. Ela pode ser encontrada em [1]. Começamos com algumas definições.

Seja $(D, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. D é dito *conjunto dirigido* se, para quaisquer $a, b \in D$, existe $c \in D$ tal que $a \leq c$ e $b \leq c$. Se D é conjunto dirigido e X é um espaço topológico, uma função $f : D \longrightarrow X$ é dita uma *rede* em X. Dizemos que a rede converge para o ponto $x \in X$ se, para cada vizinhança V de x, existe $d_0 \in D$ tal que $d \geq d_0 \implies f(d) \in V$.

Na demonstração do lema seguinte, utilizaremos a seguinte notação: se $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ e A é um espaço vetorial, então

$$r \cdot A = \{ r \cdot a \mid a \in A \}.$$

Lema 5.2.1. *Sejam X um espaço de Banach e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in D}$ uma rede de operadores lineares limitados $U_\alpha : X \longrightarrow X$. Se $\lim_\alpha U_\alpha(x) = x$ uniformemente em um conjunto limitado K e se $U_\alpha(B[0;1])$ é relativamente compacto para todo $\alpha \in D$, então K é relativamente compacto.*

Demonstração: Como X é espaço de Banach, $\overline{K}$ é completo. Então, pela Proposição 2.0.5, para mostrar que K é relativamente compacto, basta mostrar que $\overline{K}$ é totalmente limitado. Por sua vez, isso pode ser feito mostrando que K é totalmente limitado.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $\lim_\alpha U_\alpha(x) = x$ uniformemente em K, existe $a \in D$ tal que,

$$\|U_a(k) - k\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \in K$$

Agora, sabemos que K é limitado. Então, existe $r > 0$ tal que $K \subset B[0;r]$. Mas, pela linearidade de U_a,

$$U_a(B[0;r]) = U_a(r \cdot B[0;1]) = r \cdot U_a(B[0;1]).$$

Como $U_a(B[0;1])$ é relativamente compacto, $U_a(B[0;r])$ também é. Então $U_a(K)$ é relativamente compacto, pois está contido em $U_a(B[0;r])$.

Pela Proposição 2.0.5, $U_a(K)$ é totalmente limitado. Então existem $k_1, \cdots, k_n \in K$ tais que, para todo $k \in K$, existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que

$$\|U_a(k) - U_a(k_j)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mas então, para um dado $k \in K$, existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que

$$\|k - k_j\| \leq \|k - U_a(k)\| + \|U_a(k) - U_a(k_j)\| + \|U_a(k_j) - k_j\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Então, K é totalmente limitado, o que conclui a demonstração. $\square$

Para um dado espaço topológico Hausdorff compacto S, definimos $\mathcal{B}(S)$ como o conjunto de todas as funções limitadas $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Por sua vez, definimos $\mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$ como o fecho em $\mathcal{B}(S)$ do conjunto de todas as combinações lineares de funções características de subconjuntos de S. Usaremos $\mathscr{C}(S)$ para denotar o conjunto das funções contínuas de S em $\mathbb{R}$. Sabemos que $\mathcal{B}(S)$ é espaço de Banach. Consequentemente, $\mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$ também é. Dado $E \subset S$, detoratemos por χ_E a função característica de E.

Pode parecer curiosa a ideia de se estudar o espaço $\mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$, mas note que ele é bem extenso. De fato, ele contém $\mathscr{C}(S)$:

Proposição 5.2.2. *Se S é espaço topológico Hausdorff compacto, então $\mathscr{C}(S) \subset \mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$.*

Demonstração: Seja $f \in \mathscr{C}(S)$ e $\varepsilon > 0$. Queremos obter uma combinação linear de funções características que esteja a distância ε de f. Usamos uma ideia similar à que foi usada na demonstração do Teorema de Stone-Weierstrass desta sessão. Para cada $s \in S$, defina

$$V_s = \{x \in S : |f(s) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Como f é contínua, V_s é vizinhança aberta de s. Da cobertura $S \subset \bigcup_{s \in S} V_s$, extraímos uma subcobertura finita $S \subset V_{s_1} \cup \cdots \cup V_{s_n}$. Definimos então $E_1 = V_{s_1}, E_2 = V_{s_2} \setminus E_1, E_3 = V_{s_3} \setminus (E_1 \cup E_2), \cdots, E_n = V_{s_n} \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que cada E_i é não vazio. Seja então $x_1 \in E_1, \cdots, x_n \in E_n$. Note que os conjuntos E_i são disjuntos e que a união deles é S. Agora, definimos $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $g(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\chi_{E_i}(x)$. Então, se $x \in S$, existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $x \in E_j$. Daí, $g(x) = f(x_j)$. Então, $|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_j)|$. Mas $x \in E_j \subset V_{s_j}$, então $|f(x) - f(x_j)| < \varepsilon/2$. Como isso vale para todo $x \in S$, temos que $\|f - g\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Como conseguimos obter combinações lineares de funções características arbitrariamente próximas de f, então $f \in \mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$. □

Proposição 5.2.3. *Seja $K \subset \mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$ um conjunto limitado. Suponha que, para cada $\varepsilon > 0$, existem subconjuntos disjuntos $E_1, \cdots, E_n \subset S$ cuja união é S e pontos $s_1 \in E_1, \cdots, s_n \in E_n$, tais que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$,*

$$\sup_{s \in E_i} |f(s_i) - f(s)| < \varepsilon, \quad \forall f \in K.$$

Então, K é relativamente compacto.

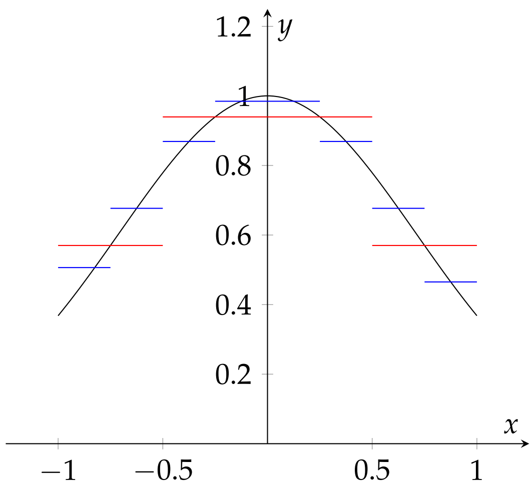
Demonstração: Nossa estratégia será usar o Lema 5.2.1. Começamos definindo um operador linear. Seja A o conjunto de todos os conjuntos da forma $a = \{E_1, \cdots, E_n\,; s_1, \cdots, s_n\}$, em que $E_1, \cdots, E_n \subset S$ são subconjuntos disjuntos de união S e $s_i \in E_i$, $i = 1, \cdots, n$. Munimos A da ordem $\leq$, na qual dizemos que $a = \{E_1, \cdots, E_n\,; s_1, \cdots, s_n\} \leq a' = \{E'_1, \cdots, E'_m\,; s'_1, \cdots, s'_m\}$ se cada conjunto E_i em a é união de conjuntos E' em a'. Isto é, os conjuntos de a' são "obtidos" particionando conjuntos em a. Com esta ordem, A é conjunto dirigido.

Agora, para cada $a \in A$, definimos o operador $U_a : \mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S)) \longrightarrow \mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$ dado por $U_a(f) = f_a$, em que

$$f_a = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\chi_{E_i}.$$

É fácil verificar que U_a é linear.

Note que o que o operador faz é "aproximar" $f \in \mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$, particionando S em n conjuntos, tomando o valor de f em um ponto de cada um deles e aproximando f neste pedaço todo como uma função constante com esse valor. Note que se $a < a'$, esperamos que $f_{a'}$ seja uma aproximação melhor de f do que f_a, pois estaremos pegando uma partição mais fina de S. Ilustramos esta intuição através do gráfico seguinte, em que temos uma função f em preto, f_a em vermelho e $f_{a'}$ em azul, onde $a < a'$.



Para aplicar o Lema 5.2.1, precisamos mostrar que cada U_a é limitado, que $\lim_a U_a(f) = f$ uniformemente em K e que $U_a(B[0;1])$ é relativamente compacto para todo $a \in A$.

Primeiro, seja $f \in \mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$ e $a = \{E_1, \cdots, E_n\,; s_1, \cdots, s_n\} \in A$. Para $x \in S$, existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $x \in E_j$. Daí, temos que $f_a(x) = f(s_j)$. Mas então, $\min_{s\in S} f(s) \leq f_a(x) \leq \max_{s\in S} f(s)$. Então $\|U_a(f)\| \leq \|f\|$, para toda $f \in \mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$. Em outras palavras, $\|U_a\| \leq 1$. Isso prova que U_a é operador limitado para todo $a \in A$.

Agora, usaremos a hipótese para mostrar a convergência uniforme. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $a = \{E_1, \cdots, E_n\,; s_1, \cdots, s_n\} \in A$ tal que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\sup_{s\in E_i} |f(s_i) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall f \in K.$$

Suponha $a' = \{E'_1, \cdots, E'_m\,; s'_1, \cdots, s'_m\} \geq a$. Tome $x \in S$. Daí, existem $j' \in \{1, \cdots, m\}$ e $j \in \{1, \cdots, n\}$ tais que $x \in E'_{j'} \subset E_j$. Então,

$$|(U_{a'}(f))(x) - f(x)| = |f(s'_{j'}) - f(x)| \leq |f(s'_{j'}) - f(s_j)| + |f(s_j) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

uma vez que $s'_{j'}, s_j, x \in E_j$. Assim, $\|U_{a'}(f) - f\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Resta apenas mostrar que todo $U_a(B[0;1])$ é relativamente compacto. Tome $a = \{E_1, \cdots, E_n\,; s_1, \cdots, s_n\} \in A$. Seja Y o subespaço de $\mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$ gerado por $\{\chi_{E_1}, \cdots, \chi_{E_n}\}$. Temos que $U_a(B[0;1]) \subset Y$. Além disso, como $\|U_a\| \leq 1$, temos que $U_a(B[0;1]) \subset B_Y[0;1]$, onde $B_Y[0;1]$ denota a bola em Y. Mas, pela Proposição 2.0.9, como Y tem dimensão finita, $B_Y[0;1]$ é compacta. Como subconjunto fechado de compacto é compacto, $U_a(B[0;1])$ é relativamente compacto.

Como todas as hipóteses estão satisfeitas, podemos aplicar o Lema 5.2.1, concluindo assim que K é relativamente compacto. $\square$

Agora, definiremos o conceito de equicontinuidade para espaços topológicos: Um subconjunto $K \subset \mathscr{C}(S)$ é dito *equicontínuo em* $s \in S$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de s tal que

$$\sup_{f\in K}\sup_{t\in V} |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Note que esta é uma extensão natural do conceito de equicontinuidade em espaços métricos. De fato, estamos simplesmente dizendo que qualquer que seja $t \in V$ e qualquer que seja $f \in K$, $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Isto é, para todo ε existe uma vizinhança V que "funciona" para todas as funções de K. K é dito simplesmente *equicontínuo* se for equicontínuo em todo $s \in S$.

Teorema 5.2.4 (Teorema de Ascoli-Arzelà em Espaços Topológicos)**.** *Seja S espaço topológico Hausdorff compacto. Então, $K \subset \mathscr{C}(S)$ é relativamente compacto se, e somente se, é limitado e equicontínuo.*

Demonstração: Comece supondo K limitado e equicontínuo, e seja $\varepsilon > 0$ dado. Pela definição de equicontínuidade, para cada $x \in S$, conseguimos obter uma vizinhança V_x tal que

$$\sup_{f\in K}\sup_{t\in V_x} |f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usando a compacidade de S, obtemos uma cobertura finita $S \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Definimos então $E_1 = V_{x_1}, E_2 = V_{x_2} \setminus E_1, \cdots, E_n = V_{x_n} \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})$. Dessa forma, obtemos n conjuntos disjuntos, de união S. Podemos supor, sem perda de generalidade, que todo E_i é não vazio. Tomamos, então, $s_1 \in E_1, \cdots, s_n \in E_n$. Para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ e para $t \in E_i$, temos

$$|f(s_i) - f(t)| \leq |f(s_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(t)|.$$

Mas, como $s_i, x_i, t \in E_i$,

$$\sup_{f\in K}\sup_{t\in E_i} |f(s_i) - f(t)| \leq |f(s_i) - f(x_i)| + \sup_{f\in K}\sup_{t\in E_i} |f(x_i) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Então,

$$\sup_{t\in E_i} |f(s_i) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall f \in K.$$

Como $K \subset \mathscr{C}(S) \subset \mathcal{B}(S;\mathcal{P}(S))$, pela Proposição 5.2.3, K é relativamente compacto.

Para a recíproca, sabemos pela Proposição 2.0.5 que K é totalmente limitado, e portanto limitado. Mais do que isso, dado $\varepsilon > 0$, existem $f_1, \cdots, f_n \in K$ tais que $K \subset B(f_1, \varepsilon/3) \cup \cdots \cup B(f_n, \varepsilon/3)$. Dado $s \in S$, podemos usar a continuidade das funções para obter $V_1, \cdots, V_n$ vizinhanças de s tais que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$|f_i(s) - f_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t \in V_i.$$

Tomando então $V = V_1 \cap \cdots \cap V_n$, obtemos uma única vizinhança de s que satisfaz a condição acima para cada cada f_i. Dada $f \in K$, existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $f \in B(f_j, \varepsilon/3)$. Então para todo $t \in V$, vale

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f_j(s)| + |f_j(s) - f_j(t)| + |f_j(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$\sup_{f \in K} \sup_{t \in V} |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

O que mostra que K é equicontínuo em todo $s \in S$, e portanto é equicontínuo. $\square$

Referências Bibliográficas

Livros

[1] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators, I*, Interscience Publishers Inc., New York, 1988.

[2] R. R. Goldberg, *Methods of Real Analysis*, Blaisdell Publishing Company, 1964.

[3] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, SBM-Projeto Euclides, 2011.

[4] J. B. Prolla, *Weierstrass-Stone, the Theorem*, Approximation & Optimization, Verlag Peter Lang, 1993.

[5] T. Tao, Compactness and compactification, The Princeton Companion to Mathematics (Ed. T. Gowers, J. Barrow-Green and I. Leader), Princeton University Press, 2008, pp 167-169.

[6] D. Valleman, *Calculus: A Rigorous First Course*, Dover Publications, 2016.

,